PART3　定積分で表された関数の決定

3　[1]　等式 $f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

[2]　x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の極値を求めよ。

Point Pickup

[1]　$\int_0^1 tf(t)dt$，$\int_0^1 f(t)dt$ は定数であることから

$$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^1 tf(t)dt=b\ (a,\ b \text{ は定数})$$

とおく。

[2]　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$ を利用して，両辺を x で微分する。

第17講　PART3　確認問題

1 等式 $f(x)=x+\int_0^1 xf(t)dt-\int_0^1 2tf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

2 x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$ の極値を求めよ。

極大値　$x=\boxed{オカ}$ で $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$,

$x=\boxed{ケ}$ で $\boxed{コサ}$

極小値　$x=\boxed{シ}$ で $\boxed{ス}$

PART3　定積分で表された関数の決定

3　[1]　等式 $f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

[2]　x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の極値を求めよ。

[1]　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1=\int_0^1 tf(t)dt+x\int_0^1 f(t)dt+1$

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと　$f(x)=ax+b+1$

このとき

$$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (at+b+1)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_0^1=\frac{a}{2}+b+1$$

$$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(at+b+1)dt=\int_0^1 \{at^2+(b+1)t\}dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b+1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}$$

これより　$a-2b=2$，$2a-3b=-3$　　　よって　$a=-12$，$b=-7$

したがって　$f(x)=-12x-6$

[2]　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t(t^2-1)dt=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$，0，1

$f(x)$ の増減表は右のとおり

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

ここで　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt=\int_0^x (t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$　より

$$f(-1)=-\frac{1}{4},\ f(0)=0,\ f(1)=-\frac{1}{4}$$

よって，$x=0$ で極大値 0，$x=-1$，1 で極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

第 17 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：6，イ：5，ウ：2，エ：5

[解説]

$$f(x)=x+\int_0^1 xf(t)dt-\int_0^1 2tf(t)dt$$

$$=x+x\int_0^1 f(t)dt-2\int_0^1 tf(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと **[A]**

$$f(x)=x+ax-2b=(a+1)x-2b$$

このとき

$$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 \{(a+1)t-2b\}dt$$

$$=\left[\frac{a+1}{2}t^2-2bt\right]_0^1=\frac{a+1}{2}-2b$$

$$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t\{(a+1)t-2b\}dt$$

$$=\int_0^1 \{(a+1)t^2-2bt\}dt=\left[\frac{a+1}{3}t^3-bt^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a+1}{3}-b$$

よって　$a+4b=1$，$a-6b=-1$

ゆえに　$a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{5}$

したがって

$$f(x)=\left(\frac{1}{5}+1\right)x-\frac{2}{5}$$

すなわち

$$f(x)=\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}$$

[A]　$\int_0^1 f(t)dt$，$\int_0^1 tf(t)dt$ は定数。

2

[正解] オカ：-1，キ：3，ク：4，ケ：4，コサ：32，
シ：0，ス：0

[解説]

$f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t(t+1)(4-t)dt \quad \text{[B]}$$

$$=x(x+1)(4-x)=-x(x+1)(x-4)$$

[B]　$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 4$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

ここで

$$f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$$

$$=\int_0^x (-t^3+3t^2+4t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3+2t^2\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2$$

ゆえに

$$f(-1)=-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+(-1)^3+2\cdot(-1)^2$$

$$=\frac{3}{4}$$

$$f(0)=0$$

$$f(4)=-\frac{1}{4}\cdot 4^4+4^3+2\cdot 4^2=32$$

よって　**$x=-1$ で極大値 $\frac{3}{4}$，$x=4$ で極大値 32，**

$x=0$ で極小値 0

をとる。